



第 6 章 空间向量 与立体几何

6.1 空间向量及其运算

6.1.1 空间向量的线性运算

1. A 【解析】对于 A, 零向量的相反向量是它本身, A 是假命题;

对于 B, 空间向量既有大小又有方向, 故任意两个空间向量都不能比较大小, B 是真命题;

对于 C, 若 $|\mathbf{a}| = 0$, 则 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, C 是真命题;

对于 D, 两个相等的向量, 若起点相同, 则终点也相同, D 是真命题. 故选 A.

2. AB 【解析】选项 A 中, \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的方向不能确定;

选项 B 中, 两个向量无法比较大小;

选项 C 中, 由 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \mathbf{0}$ 得 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$, 则 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$;

选项 D 中, 由 $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ 得

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \frac{2}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}), \text{ 即 } \overrightarrow{AC} =$$

$2\overrightarrow{CB}$, 所以 A, B, C 三点共线. 故选 AB.

3. A 【解析】在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1}$.

故选 A.

4. BD 【解析】A 中, 原式 $= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, 不符合题意;

B 中, 原式 $= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \mathbf{0}$, 符合题意;

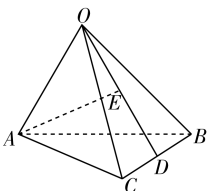
C 中, 原式 $= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$, 不符合题意;

D 中, 原式 $= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \mathbf{0}$, 符合题意. 故选 BD.

5. A 【解析】如图所示, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} =$



$$\begin{aligned}\vec{AO} + \frac{1}{2}\vec{OD} &= \vec{AO} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) = \\ &= -\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}. \text{ 故选 A.}\end{aligned}$$



6. A 【解析】对于 A, 向量 \vec{a}, \vec{b} 不共线, 且 $\vec{AB} = \vec{a} + 4\vec{b}, \vec{BC} = -\vec{a} + 9\vec{b}, \vec{CD} = 3\vec{a} - \vec{b}$, 则 $\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = 2\vec{a} + 8\vec{b} = 2(\vec{a} + 4\vec{b}) = 2\vec{AB}$, 则有 $\vec{AB} \parallel \vec{BD}$, 所以点 A, B, D 共线, 故 A 符合;

对于 B, 由于 $\vec{BC} \neq \vec{0}$, 故不存在实数 λ , 使得 $\vec{AB} = \lambda \vec{BC}$, 因此 \vec{AB}, \vec{BC} 不共线, 即点 A, B, C 不共线, 故 B 不符合;

对于 C, 由于 $\vec{BC} \neq \vec{0}$, 故不存在实数 μ , 使得 $\vec{CD} = \mu \vec{BC}$, 因此 \vec{BC}, \vec{CD} 不共线, 即点 B, C, D 不共线, 故 C 不符合;

对于 D, 由于 $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = 13\vec{b} \neq \vec{0}$, 故不存在实数 t , 使得 $\vec{CD} = t\vec{AC}$, 因此 \vec{AC}, \vec{CD} 不共线, 即点 A, C, D 不共线, 故 D 不符合. 故选 A.

7. C 【解析】由 $\vec{AB} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{BC} = \vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 + \vec{e}_3$,

$$\text{得 } \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = 2\vec{e}_1 + (1 + \lambda)\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,$$

因为 A, C, D 三点共线, 所以 $\vec{AC} \parallel \vec{CD}$, 则存在唯一实数 μ , 使得 $\vec{AC} = \mu \vec{CD}$,

$$\text{则 } \begin{cases} 2 = 4\mu, \\ 1 + \lambda = 8\mu, \\ 2 = 4\mu, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \mu = \frac{1}{2}, \\ \lambda = 3, \end{cases} \text{ 故选 C.}$$

8. D 【解析】连接 AE , 因为 F 为 BE 的中点, 所以 $\vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AE}$, 又 $\vec{AF} =$

$$\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{6}\vec{AD},$$

$$\text{所以 } \vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AD} \text{ ①.}$$

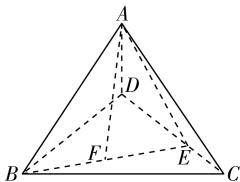
$$\text{由 } \vec{DE} = \lambda \vec{DC} \text{ 得 } \vec{AE} - \vec{AD} = \lambda(\vec{AC} - \vec{AD}),$$

$$\text{即 } \vec{AE} = \lambda \vec{AC} + (1 - \lambda)\vec{AD} \text{ ②,}$$

$$\text{根据 ①② 式可得 } \lambda = \frac{2}{3}.$$



故选 D.



6.1.2 空间向量的数量积

1. D 【解析】因为 $b \cdot (a+b) = 0$, 所以

$a \cdot b + b^2 = 0$, 即 $a \cdot b = -b^2$, 所以 $a-b$ 在 b 上的投影向量为 $|a-b| \cos \langle a-b, b \rangle \cdot$

$$\frac{b}{|b|} = \left[|a-b| \times \frac{(a-b) \cdot b}{|a-b||b|} \right] \frac{b}{|b|} =$$

$$\frac{a \cdot b - b^2}{|b|^2} b = \frac{-2b^2}{|b|^2} b = -2b. \text{ 故选 D.}$$

2. B 【解析】依题意有 $|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b = 2 + 2\cos \theta > 1$, 即

$$\cos \theta > -\frac{1}{2}, \text{ 又 } \theta \in [0, \pi], \text{ 所以 } \theta \in$$

$$\left[0, \frac{2\pi}{3}\right). \text{ 故选 B.}$$

3. BD 【解析】由 $a \cdot b = |a||b|\cos \langle a, b \rangle = 0$, 可知 $|a| = 0$ 或 $|b| = 0$ 或 $|a|,$

$|b|$ 都为 0 或 $\cos \langle a, b \rangle = 0$, 即 $a = 0$ 或

$b = 0$ 或 a, b 都为 0 或 $\langle a, b \rangle = \frac{\pi}{2}$, 故 A

正确;

$|a| - |b| < |a+b|$, 向量 a, b 可能共线,

比如共线向量 a, b 的模分别是 2, 3, 故

B 错误;

在空间四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} \cdot$

$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{CB} \cdot$

$(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$, 故 C

正确;

在棱长为 1 的正四面体 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} \cdot$

$$\overrightarrow{BC} = 1 \times 1 \times \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \text{ 故 D 错误.}$$

4. C 【解析】 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) =$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2$, 因为 $\angle BAD =$

90° , 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$

2. 又 $AB = AC = 2$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot$

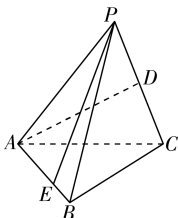
$|\overrightarrow{AC}| \cos \angle BAC = 2$, 所以 $\cos \angle BAC =$



$\frac{1}{2}$, 又 $0^\circ < \angle BAC < 180^\circ$, 所以 $\angle BAC =$

60° . 故选 C.

5. A 【解析】根据题意可作图如图所示,



因为 $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB}$, 所以 $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AP} =$
 $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}$.

因为 D 是棱 PC 的中点, 所以 $\overrightarrow{AD} =$
 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC})$,

则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC}) \cdot$

$\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AP}^2 + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP}\right)$,

由题意, $\triangle PAB, \triangle ABC, \triangle PAC$ 都是等边三角形, $PA = AB = 4$,

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP} = 4 \times$

$4 \times \cos \frac{\pi}{3} = 8$,

故 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{PE} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} \times 8 - 16 + \frac{2}{3} \times 8 - 8\right) = -\frac{20}{3}$.

故选 A.

6. D 【解析】由题知 $\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} +$
 $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$,

则 $\overrightarrow{A_1C}^2 = \overrightarrow{AA_1}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} -$
 $2\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 + 1 + 1 - 2 \times 1 \times$

$1 \times \frac{1}{2} - 2 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = 2$, 所

以 $A_1C = |\overrightarrow{A_1C}| = \sqrt{2}$. 故选 D.

7. $\frac{14}{3}$ 【解析】 $\because \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}$

$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$



$$\begin{aligned}
&= \vec{OA} + \frac{1}{3}[(\vec{OB} - \vec{OA}) + (\vec{OC} - \vec{OA})] \\
&= \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC} + \frac{1}{3}\vec{OA}, \\
&\therefore \vec{OG} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \\
&= \left(\frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC} + \frac{1}{3}\vec{OA}\right) \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \\
&= \frac{1}{3}\vec{OB}^2 + \frac{1}{3}\vec{OC}^2 + \frac{1}{3}\vec{OA}^2 \\
&= \frac{1}{3} \times 2^2 + \frac{1}{3} \times 3^2 + \frac{1}{3} \times 1^2 = \frac{14}{3}.
\end{aligned}$$

8. 【解】 $\because \angle ACD = 90^\circ, \therefore \vec{AC} \cdot \vec{CD} = 0$, 同理可得 $\vec{AC} \cdot \vec{BA} = 0$.

$\because AB$ 与 CD 成 60° 角, $\therefore \langle \vec{BA}, \vec{CD} \rangle = 60^\circ$ 或 $\langle \vec{BA}, \vec{CD} \rangle = 120^\circ$.

又 $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CD}, \therefore |\vec{BD}|^2 = |\vec{BA}|^2 + |\vec{AC}|^2 + |\vec{CD}|^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{AC} + 2\vec{BA} \cdot \vec{CD} + 2\vec{AC} \cdot \vec{CD} = 3 + 2 \times 1 \times 1 \cdot \cos \langle \vec{BA}, \vec{CD} \rangle$.

\therefore 当 $\langle \vec{BA}, \vec{CD} \rangle = 60^\circ$ 时, $|\vec{BD}|^2 = 4$, 此时点 B, D 间的距离为 2; 当 $\langle \vec{BA}, \vec{CD} \rangle = 120^\circ$ 时, $|\vec{BD}|^2 = 2$, 此时点 B, D 间的距离为 $\sqrt{2}$.

9. AB 【解析】依题意有 $\vec{AA}_1 \cdot \vec{AB} =$

$$\vec{AA}_1 \cdot \vec{AD} = \vec{AD} \cdot \vec{AB} = 6 \times 6 \times \cos 60^\circ = 18,$$

$$\begin{aligned}
\text{则 } |\vec{AC}_1|^2 &= (\vec{AA}_1 + \vec{AB} + \vec{AD})^2 = \vec{AA}_1^2 + \vec{AB}^2 + \vec{AD}^2 + 2\vec{AA}_1 \cdot \vec{AB} + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + 2\vec{AA}_1 \cdot \vec{AD} \\
&= 36 + 36 + 36 + 3 \times 2 \times 18 = 216, \text{ 所以 } |\vec{AC}_1| = 6\sqrt{6}, \text{ 故 A 正确;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{因为 } \vec{AC}_1 \cdot \vec{DB} &= (\vec{AA}_1 + \vec{AB} + \vec{AD}) \cdot (\vec{AB} - \vec{AD}) = \vec{AA}_1 \cdot \vec{AB} - \vec{AA}_1 \cdot \vec{AD} + \vec{AB}^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AD} \cdot \vec{AB} - \vec{AD}^2 = 0, \text{ 所以 } AC_1 \perp DB, \text{ 故 B 正确;}
\end{aligned}$$

由题易知 $\triangle AA_1D$ 为等边三角形, $\angle AA_1D = 60^\circ$, 又 $\vec{B_1C} = \vec{A_1D}$, 且向量 $\vec{A_1D}$ 与 $\vec{AA_1}$ 的夹角是 120° , 所以 $\vec{B_1C}$ 与 $\vec{AA_1}$ 的夹角是 120° , 故 C 不正确;

$$\begin{aligned}
\text{因为 } \vec{BD}_1 &= \vec{AD} + \vec{AA}_1 - \vec{AB}, \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}, \\
\text{所以 } |\vec{BD}_1| &= \sqrt{(\vec{AD} + \vec{AA}_1 - \vec{AB})^2} = 6\sqrt{2}, \\
|\vec{AC}| &= \sqrt{(\vec{AB} + \vec{AD})^2} = 6\sqrt{3}, \\
\vec{BD}_1 \cdot \vec{AC} &= (\vec{AD} + \vec{AA}_1 - \vec{AB}) \cdot (\vec{AB} + \vec{AD})
\end{aligned}$$



$\overrightarrow{AD}) = 36$, 所以 $\cos \langle \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BD_1}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{36}{6\sqrt{2} \times 6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 故 D 不正确. 故选 AB.

10. C 【解析】设正四面体 $ABCD$ 的内切球球心为 O , G 为 $\triangle BCD$ 的中心, E 为 CD 的中点, 连接 AG , BE , 则点 O 在 AG 上, 连接 BO , 则 $AO = BO$.

因为正四面体 $ABCD$ 的棱长为 3, 所以

$$BG = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{9 - 3} = \sqrt{6}.$$

设内切球 O 的半径为 r ,

$$\text{则 } (AG - r)^2 = r^2 + BG^2, \text{ 即 } (\sqrt{6} - r)^2 = r^2 + (\sqrt{3})^2, \text{ 解得 } r = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

当 MN 为内切球 O 的直径时, MN 最长, 此时 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \mathbf{0}$, $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} =$

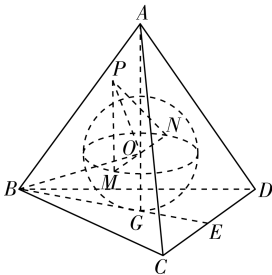
$$-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 = -\frac{3}{8}, \text{ 连接 } PO,$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} &= (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{ON}) = \overrightarrow{PO}^2 + \overrightarrow{PO} \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \\ &= \overrightarrow{PO}^2 - \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

因为 P 为该正四面体表面上的动点, 所以当 P 为该正四面体的顶点时,

$|\overrightarrow{PO}|$ 最大, $|\overrightarrow{PO}|$ 的最大值为 $\sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$, 所以 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的最大值为

$$\left(\frac{3\sqrt{6}}{4}\right)^2 - \frac{3}{8} = 3. \text{ 故选 C.}$$



11. [3, 9] 【解析】设 $\triangle BCD$ 的中心为 O , 连接 AO (图略), 易知 $AO \perp$ 平面 BCD .

$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{PO},$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}| = |3\overrightarrow{PO}| = 3,$$



则 $|\overrightarrow{PO}| = 1$,

所以点 P 在以 O 为球心, 1 为半径的球上.

由正四面体 $ABCD$ 的棱长为 3,

可知 $|\overrightarrow{BO}| = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \sqrt{3}$, $|\overrightarrow{AO}| =$

$$\sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6},$$

则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} \cdot$

$(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}) + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AO}|^2 + |\overrightarrow{OP}| \cdot$

$|\overrightarrow{AD}| \cdot \cos \langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{AD} \rangle = 6 + 3 \cos \langle \overrightarrow{OP},$

$\overrightarrow{AD} \rangle \in [3, 9]$.

12. (1) 【解】设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{c}$, 则

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle =$

$\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = 60^\circ$.

因为 $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \mathbf{c} - \frac{1}{2} \mathbf{a}$, 且

$\overrightarrow{BA} = -\mathbf{a}$,

所以 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BA} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{c} - \frac{1}{2} \mathbf{a} \right) \cdot$

$$(-\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{4}.$$

(2) 【证明】因为 $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} +$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2} \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{c},$$

所以 $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{1}{2} \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{c} \right) \cdot$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^2 = \frac{1}{2} |\mathbf{b}| \cdot$$

$$|\mathbf{a}| \cos 60^\circ + \frac{1}{2} |\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos 60^\circ -$$

$$\frac{1}{2} |\mathbf{a}|^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} -$$

$$\frac{1}{2} \times 1^2 = 0,$$

即 $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 故 $EG \perp AB$.

(3) 【解】因为 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) =$

$$\frac{1}{2} \mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{c}, \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = -\mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{a},$$

所以 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CE} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{b} + \frac{1}{2} \mathbf{c} \right) \cdot \left(-\mathbf{b} +$

$$\frac{1}{2} \mathbf{a} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - |\mathbf{b}|^2 + \frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} -$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \right) = -\frac{1}{2}.$$

因为 $|\overrightarrow{AG}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\overrightarrow{CE}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$,



$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CE} \rangle = \frac{\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{AG}| |\overrightarrow{CE}|} = -\frac{2}{3}.$$

又异面直线所成角的范围是 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 故异面直线 AG 与 CE 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.

6.1.3 共面向量定理

1. D 【解析】通过平移可将空间中任意两个向量平移到一个平面内, 因此空间中任意两个向量都是共面的, 故 B, C 都不正确. 由向量平行与直线平行的区别, 可知 A 不正确.

因为 AB, AC, AD 是空间中共端点 A 但不共面的三条线段, 所以向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ 不共面, 故 D 正确. 故选 D.

2. C 【解析】因为非零向量 e_1, e_2 不共线, 所以 $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = (-3e_1 + 7e_2) + 2(2e_1 - 3e_2) = e_1 + e_2 = \overrightarrow{AD}$, 由共面向量定理可知, A, B, C, D 四点共面. 故选 C.

3. D 【解析】由共面向量定理的推论可知, 若 M, A, B, C 四点共面, 则 $\overrightarrow{OM} = m \cdot \overrightarrow{OA} + n \cdot \overrightarrow{OB} + p \cdot \overrightarrow{OC}$, $m + n + p = 1$, 由此可以判断选项 A, B, C 错误, 选项 D 正确. 故选 D.

4. 【解】 $\because \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1 - k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC_1} = k(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC})$, $\therefore \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (1 - k)\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AA_1}$, \therefore 由共面向量定理知, 向量 \overrightarrow{MN} 与向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}$ 共面.

5. A 【解析】因为 m, n, p 共面, 所以存在实数 s, t , 使得 $p = sm + tn = s(2a - b) + t(b + c) = 2sa + (t - s)b + tc = xa + 5b + 3c$, 所以 $\begin{cases} 2s = x, \\ -s + t = 5, \\ t = 3, \end{cases}$ 解得 $t = 3, s = -2, x = -4$. 故选 A.

6. A 【解析】由题意知 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} =$



$3\vec{OC}-x\vec{OA}-y\vec{OB}$, 则 $\vec{OD}=4\vec{OC}-x\vec{OA}-y\vec{OB}$,

因为 A, B, C, D 四点共面, 所以 $4-x-y=1$, 即 $x+y=3$, 且 $x>0, y>0$,

所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{3}\left(2+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\geq\frac{4}{3}$, 当且仅当 $x=y=\frac{3}{2}$ 时, 等号成立,

所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$. 故选 A.

7. A 【解析】由题意可得 $\vec{DE}=\vec{DA}+\vec{AE}=\vec{DA}+\frac{1}{2}\vec{DC}$,

因为 $\vec{PF}=2\vec{FB}$, 所以 $\vec{PF}=\frac{2}{3}\vec{PB}$,

所以 $\vec{DF}=\vec{DP}+\vec{PF}=\vec{DP}+\frac{2}{3}(\vec{PD}+\vec{DA}+\vec{DC})=\frac{1}{3}\vec{DP}+\frac{2}{3}\vec{DA}+\frac{2}{3}\vec{DC}$.

因为 $\vec{PG}=\lambda\vec{GC}$, 由题可知, $\lambda\neq-1$, 所以

以 $\vec{PG}=\frac{\lambda}{\lambda+1}\vec{PC}(\lambda\neq-1)$,

所以 $\vec{DG}=\vec{DP}+\frac{\lambda}{\lambda+1}(\vec{PD}+\vec{DC})=\frac{1}{\lambda+1}\cdot$

$\vec{DP}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\vec{DC}$.

因为 D, E, F, G 四点共面, 所以存在有序实数组 (x, y) , 使 $\vec{DG}=x\vec{DE}+y\vec{DF}$,

所以 $\frac{1}{\lambda+1}\vec{DP}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\vec{DC}=x\left(\vec{DA}+\frac{1}{2}\vec{DC}\right)+y\left(\frac{1}{3}\vec{DP}+\frac{2}{3}\vec{DA}+\frac{2}{3}\vec{DC}\right)=\frac{y}{3}\vec{DP}+\left(x+\frac{2y}{3}\right)\vec{DA}+\left(\frac{x}{2}+\frac{2y}{3}\right)\vec{DC}$,

所以 $\begin{cases} \frac{y}{3}=\frac{1}{\lambda+1}, \\ x+\frac{2y}{3}=0, \\ \frac{x}{2}+\frac{2y}{3}=\frac{\lambda}{\lambda+1}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-1, \\ y=\frac{3}{2}, \\ \lambda=1, \end{cases}$

故选 A.

8. 【证明】 $\because \vec{MN}=\vec{MP}+\vec{PB}+\vec{BN}=-\vec{PM}+$

$\vec{PB}+\vec{BN}=-\frac{5}{13}\vec{PA}+\vec{PB}+\frac{5}{13}\vec{BD}=-\frac{5}{13}\cdot$

$(\vec{BA}-\vec{BP})+\vec{PB}+\frac{5}{13}(\vec{BA}+\vec{BC})=\frac{5}{13}\vec{BC}-$



$\frac{8}{13}\overrightarrow{BP}$, 又 \overrightarrow{BC} 与 \overrightarrow{BP} 不共线, $\therefore \overrightarrow{MN}$ 与 $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BP}$ 共面.

又 $\because MN \not\subset$ 平面 BCP , $\therefore MN \parallel$ 平面 BCP .

6.2 空间向量的坐标表示

6.2.1 空间向量基本定理

1. D 【解析】对于选项 A, 假设存在实数 λ, μ 满足 $a = \lambda(b+c) + \mu(a+b)$, 整理可知 λ, μ 无解, 即向量 $a, b+c, a+b$ 不共面;

对于选项 B, 假设存在实数 λ, μ 满足 $a = \lambda(a+c) + \mu(a+b)$, 整理可知 λ, μ 无解, 即向量 $a, a+c, a+b$ 不共面;

对于选项 C, 假设存在实数 λ, μ 满足 $a+b+c = \lambda c + \mu b$, 整理可知 λ, μ 无解, 即向量 $a+b+c, c, b$ 不共面;

对于选项 D, 假设存在实数 λ, μ , 满足

$$b = \lambda(a-b) + \mu(a+b), \text{ 解得 } \lambda = -\frac{1}{2},$$

$$\mu = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } b, a-b, a+b \text{ 是共面向量.}$$

故选 D.

2. AC 【解析】选项 A 中, 若 $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ ($x+y+z=1$), 则 M, A, B, C 四点共面, 即 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 共面, 所以选项 A 中, $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 不共面, 可以构成基底;

选项 C 中, 同理, $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 不共面, 可以构成基底;

选项 D 中, 因为 $6\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}, \text{ 可得}$$

M, A, B, C 四点共面, 即 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 共面, 无法构成基底;

选项 B 中, 根据共面向量定理, 由 $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, 得 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 共面, 无法构成基底. 故选 AC.

3. B 【解析】 $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} - \frac{1}{2} \cdot$



$$(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} -$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) -$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AP} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} -$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) -$$

$$\frac{1}{6}\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AP}, \text{ 所以 } x =$$

$$\frac{2}{3}, y = \frac{1}{6}, z = -\frac{1}{6}, \text{ 则 } x + y + z = \frac{2}{3}. \text{ 故}$$

选 B.

4. $-\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{5}{6}\mathbf{c}$ 【解析】如图, $\overrightarrow{AG} =$

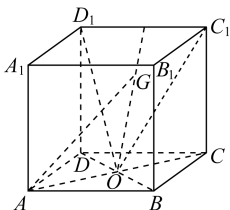
$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD_1} +$$

$$\overrightarrow{OC_1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) +$$

$$\overrightarrow{DD_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{CC_1}\right] = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) +$$

$$\frac{1}{6}(-\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{6}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \frac{1}{3}\mathbf{a} =$$

$$-\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{5}{6}\mathbf{c}.$$



5. -4 【解析】因为存在实数 λ, μ, v 使

得 $\mathbf{a}_4 = \lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_2 + v\mathbf{a}_3$ 成立, 所以 $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} +$

$5\mathbf{k} = \lambda(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + \mu(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) + v(-2\mathbf{i} +$

$\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = (2\lambda + \mu - 2v)\mathbf{i} + (-\lambda + 3\mu + v)\mathbf{j} +$

$(\lambda - 2\mu - 3v)\mathbf{k}.$

因为 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ 是一个基底, 所以 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

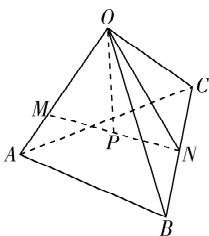
$$\text{不共面, 所以 } \begin{cases} 2\lambda + \mu - 2v = 3, \\ -\lambda + 3\mu + v = 2, \\ \lambda - 2\mu - 3v = 5, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} \lambda = -2, \\ \mu = 1, \\ v = -3, \end{cases} \text{ 故 } \lambda + \mu + v = -4.$$

6. 【解】(1) 如图, 连接 ON .

因为 P 是线段 MN 的中点, 所以 $\overrightarrow{OP} =$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}).$$



又 N 是棱 BC 的中点, 所以 $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

由 $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{MA}$, 得 $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$,

所以 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \right] = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b} + \frac{1}{4}\mathbf{c}$.

(2) $|\overrightarrow{OP}|^2 = \left(\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b} + \frac{1}{4}\mathbf{c} \right)^2 = \left(\frac{1}{3}\mathbf{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{4}\mathbf{b} \right)^2 + \left(\frac{1}{4}\mathbf{c} \right)^2 + \frac{1}{6}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{6}\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \frac{1}{8}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

因为 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = \frac{\pi}{2}$, $\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \frac{2\pi}{3}$,

所以 $|\overrightarrow{OP}|^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{25}{144}$, 则 $|\overrightarrow{OP}| = \frac{5}{12}$.

6.2.2 空间向量的坐标表示

1. B 【解析】设 $B(x, y, z)$,

由于点 $A(3, -1, 0)$, 若向量 $\overrightarrow{AB} = (2, 5, -3)$,

则 $\begin{cases} x-3=2, \\ y+1=5, \\ z=-3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=5, \\ y=4, \\ z=-3, \end{cases}$ 所以 $B(5, 4, -3)$. 故选 B.

2. C 【解析】点 P 在 xOy 平面上的投影为 $M(2, 4, 0)$, 在 xOz 平面上的投影为 $N(2, 0, 7)$,

则点 P 的坐标为 $(2, 4, 7)$, 则点 P 在 yOz 平面上的投影 Q 的坐标为 $(0, 4, 7)$. 故选 C.

3. B 【解析】方法一: 因为 $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{b} = (-1, 3, 2)$,



所以 $2\mathbf{b} = 2(-1, 3, 2) = (-2, 6, 4)$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (0, 5, 1)$, $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = (3, -4, -5)$,

故 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 0 \times 3 + 5 \times (-4) + 1 \times (-5) = 0 - 20 - 5 = -25$. 故选 B.

方法二: 因为 $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{b} = (-1, 3, 2)$, 所以 $\mathbf{a}^2 = 1 + 4 + 1 = 6$, $\mathbf{b}^2 = 1 + 9 + 4 = 14$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -1 + 6 - 2 = 3$, 故 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{b}^2 = 6 - 3 - 28 = -25$. 故选 B.

4. D 【解析】 \because 向量 \mathbf{p} 在基底 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 下的坐标为 $(2, 3, -1)$, $\therefore \mathbf{p} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$.

设向量 \mathbf{p} 在基底 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c}\}$ 下的坐标为 (x, y, z) , 则 $\mathbf{p} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c} = x\mathbf{a} + y(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + z(\mathbf{b} - \mathbf{c})$,

$$\therefore \begin{cases} x = 2, \\ y + z = 3, \\ y - z = -1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \\ z = 2, \end{cases} \text{ 即所求坐标}$$

为 $(2, 1, 2)$. 故选 D.

5. AC 【解析】 $\because A(-1, 0, 1), B(-1, 2, 2), C(-3, 0, 4)$, $\therefore \overrightarrow{AB} = (0, 2, 1), \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 3), \overrightarrow{BC} = (-2, -2, 2)$.

$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times (-2) + 2 \times 0 + 1 \times 3 = 3$, 故 A 正确.

\because 不存在实数 λ , 使得 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$,

$\therefore \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 不共线, 故 B 错误.

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$, 故 C 正确.

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} =$$

$$\frac{3}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{65}}{65}, \text{ 故 D 错误. 故}$$

选 AC.

6. $3\sqrt{2}$ 【解析】因为 $\mathbf{a} = (x, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (2, -4, 2)$, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 2x - 4 + 2 = 0$, 解得 $x = 1$, 即 $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$.

因为 $\mathbf{b} = (1, y, 1)$, 且 $\mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$, 所以 $\frac{1}{2} =$

$$\frac{y}{-4} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } y = -2, \text{ 即 } \mathbf{b} = (1, -2, 1).$$

故 $2\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, 0, 3)$, 故 $|2\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.



7. $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ 【解析】设 $\overrightarrow{OQ} = \lambda \overrightarrow{OP} = (\lambda, \lambda, 2\lambda), \lambda \in \mathbf{R}$, 则 $Q(\lambda, \lambda, 2\lambda)$, 故 $\overrightarrow{QA} = (1-\lambda, 2-\lambda, 3-2\lambda), \overrightarrow{QB} = (2-\lambda, 1-\lambda, 2-2\lambda)$, 故 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 6\lambda^2 - 16\lambda + 10 = 6\left(\lambda - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}$, 所以当 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB}$ 取最小值时, $\lambda = \frac{4}{3}$, 此时点 Q 的坐标为 $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

8. 【解】(1) 因为 $\overrightarrow{AB} = (4, 1, 2), \overrightarrow{BC} = (3, -2, 5)$, 所以 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (4, 1, 2) + (3, -2, 5) = (7, -1, 7)$, 则 $\overrightarrow{CA} = (-7, 1, -7)$, 故 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = -21 - 2 - 35 = -58$.

(2) 由(1)知 $\overrightarrow{CA} = (-7, 1, -7)$, 又 $A(2, -5, 3)$, 所以点 C 的坐标为 $(9, -6, 10)$.

设 O 为坐标原点, 因为 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$, 所

以 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP})$, 则 $\overrightarrow{OP} =$

$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}(2, -5, 3) + \frac{1}{3}(9,$

$-6, 10) = \left(\frac{13}{3}, -\frac{16}{3}, \frac{16}{3}\right)$, 故点 P 的坐

标为 $\left(\frac{13}{3}, -\frac{16}{3}, \frac{16}{3}\right)$.

9. (1) 【解】由题可知, CA, CB, CC_1 两两垂直, 以 C 为坐标原点, $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CC_1}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系 $C-xyz$.

由题意得 $N(1, 0, 1), B(0, 1, 0)$, 所以

$\overrightarrow{BN} = (1, -1, 1)$

故 $|\overrightarrow{BN}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

(2) 【解】由题意得 $A_1(1, 0, 2), B(0, 1, 0), C(0, 0, 0), B_1(0, 1, 2)$,

故 $\overrightarrow{BA_1} = (1, -1, 2), \overrightarrow{CB_1} = (0, 1, 2)$, 则

$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{CB_1} = 0 - 1 + 4 = 3$,

$|\overrightarrow{BA_1}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}, |\overrightarrow{CB_1}| =$

$\sqrt{0+1+4} = \sqrt{5}$,



$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{CB_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{CB_1}}{|\overrightarrow{BA_1}| |\overrightarrow{CB_1}|} =$$

$$\frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

$$(3) \text{【证明】由题意知 } M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right),$$

$$C_1(0, 0, 2), \overrightarrow{BA_1} = (1, -1, 2), \overrightarrow{C_1M} =$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$$

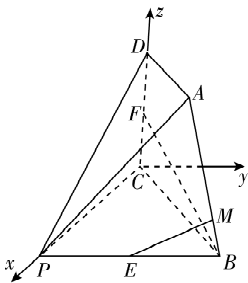
$$\text{由于 } \overrightarrow{C_1M} \cdot \overrightarrow{BA_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0,$$

$$\text{故 } \overrightarrow{C_1M} \perp \overrightarrow{BA_1}, \text{ 即 } A_1B \perp C_1M.$$

10. 【解】(1) 因为 $\triangle PBC$ 为等腰直角三角形, $\angle CPB = 90^\circ$, $BC = 4$, 所以 $PC = PB = 2\sqrt{2}$,

$$\text{又 } PD^2 = (2\sqrt{6})^2 = 24, PC^2 + CD^2 = (2\sqrt{2})^2 + 4^2 = 24, \text{ 所以 } PD^2 = PC^2 + CD^2, \text{ 所以 } DC \perp PC.$$

因为 $CD \perp AD$, $AD \parallel BC$, 故 $CD \perp BC$, 又 $PC \cap BC = C$, $PC, BC \subset \text{平面 } PBC$, 所以 $CD \perp \text{平面 } PBC$. 以 C 为原点, CP, CD 所在直线分别为 x, z 轴, 以过点 C 且平行于 PB 的直线为 y 轴, 建立空间直角坐标系 $C-xyz$, 如图所示,



$$\text{则 } P(2\sqrt{2}, 0, 0), B(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0),$$

$$F(0, 0, 2), A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4),$$

$$\overrightarrow{AP} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -4), \overrightarrow{BF} = (-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 2), \text{ 所以 } |\overrightarrow{AP}| = 2\sqrt{5}, |\overrightarrow{BF}| =$$

$$2\sqrt{5}, \text{ 所以 } \cos \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BF} \rangle = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{BF}|} =$$

$$\frac{\sqrt{2} \times (-2\sqrt{2}) + (-\sqrt{2}) \times (-2\sqrt{2}) + (-4) \times 2}{2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}} =$$

$$-\frac{2}{5}.$$

$$(2) \text{ 易知 } E(2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0).$$



设 $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} (0 \leq t \leq 1)$,

由题意知 $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, -4)$,

所以 $\overrightarrow{AM} = (\sqrt{2}t, \sqrt{2}t, -4t)$,

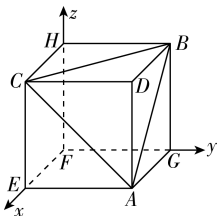
所以 $M(\sqrt{2} + \sqrt{2}t, \sqrt{2} + \sqrt{2}t, 4 - 4t)$,

$\overrightarrow{EM} = (\sqrt{2}t - \sqrt{2}, \sqrt{2}t, 4 - 4t)$.

又 $\overrightarrow{BF} = (-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 2)$, 且 $\overrightarrow{EM} \perp \overrightarrow{BF}$, 即 $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$,

所以 $-2\sqrt{2} \times (\sqrt{2}t - \sqrt{2}) - 2\sqrt{2} \times \sqrt{2}t + 8 - 8t = 0$, 解得 $t = \frac{3}{4}$, 故 $\frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{3}{4}$.

- 11. 【解】** 设几何体 $AEFG-DCHB$ 是棱长为 1 的正方体, 以 F 为坐标原点, FE, FG, FH 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



可以发现 $\triangle BCD$ 是三棱锥 $A-BCD$ 的底面, AD 是三棱锥 $A-BCD$ 的高,

故所求体积 $V = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$.

6.3 空间向量的应用

6.3.1 直线的方向向量与平面的

法向量+6.3.2 空间线面关

系的判定

- 1. AB 【解析】** 因为 $A(-1, 0, 4), B(3, 2, -1)$, 所以 $\overrightarrow{AB} = (4, 2, -5)$.

对选项 A, $-\overrightarrow{AB} = (-4, -2, 5)$, 满足题意;

对选项 B, $2\overrightarrow{AB} = (8, 4, -10)$, 满足题意;

对选项 C, 向量 $(6, 3, -7)$ 与 $\overrightarrow{AB} = (4, 2, -5)$ 不共线, 不满足题意;

对选项 D, 向量 $(-3, 5, 4)$ 与 $\overrightarrow{AB} = (4, 2, -5)$ 不共线, 不满足题意. 故选 AB.

- 2. D 【解析】** 求与 n 共线的一个向量, 易



知 $(2, -3, 1) = -(-2, 3, -1)$. 故选 D.

3. A 【解析】由题知 $\vec{AB} = (-1, 2-y, z-3)$,

因为 $m \parallel \vec{AB}$, 所以 $\frac{-1}{2} = \frac{2-y}{-1} = \frac{z-3}{3}$,

解得 $y = \frac{3}{2}, z = \frac{3}{2}$, 所以 $y-z=0$.

故选 A.

4. ABD 【解析】设该正方体的棱长为 a ($a>0$),

则 $B(a, 0, 0), B_1(a, 0, a), C(a, a, 0)$,

$C_1(a, a, a), D(0, a, 0), D_1(0, a, a)$.

A 选项, $\vec{DD_1} = (0, 0, a) = a(0, 0, 1)$, 故 A 正确;

B 选项, $\vec{BC_1} = (0, a, a) = a(0, 1, 1)$, 故 B 正确;

C 选项, 因为平面 ABB_1A_1 即为坐标平面 xOz , 所以与向量 $(0, 1, 0)$ 平行的向量均为该平面的法向量, 故 C 错误;

D 选项, $\vec{B_1C} = (0, a, -a), \vec{D_1C} = (a, 0, -a)$, 设平面 B_1CD_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{B_1C} = (x, y, z) \cdot (0, a, -a) = ay - az = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{D_1C} = (x, y, z) \cdot (a, 0, -a) = ax - az = 0, \end{cases}$$

令 $y=1$, 得 $x=1, z=1$,

所以 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ 是平面 B_1CD_1 的一个法向量, 故 D 正确. 故选 ABD.

5. B 【解析】因为 $\alpha \parallel \beta$, 所以 $\mathbf{n} \parallel \mathbf{m}$,

所以 $\frac{x}{-1} = \frac{1}{y} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} = -4$, 故 $x=4, y=-\frac{1}{4}$,

所以 $x-y = \frac{17}{4}$. 故选 B.

6. 【证明】方法一: 由 $AB \perp BC, AD \parallel BC$, 可知 $AB \perp AD$,

又 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PD \perp AB, PD \perp AD$.

故以 A 为原点, AB, AD 所在直线分别为 x 轴、 y 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 其中 z 轴 $\parallel PD$, 由题意可得 $A(0, 0, 0), D(0, 2, 0), B(2, 0, 0), C(2, 2, 0), P(0, 2, 2)$.



因为 $\overrightarrow{PB} = (2, -2, -2)$, 所以 $\overrightarrow{PF} =$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{PB} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

因为 $\overrightarrow{PC} = (2, 1, -2)$, 所以 $\overrightarrow{PM} =$

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{PC} = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right).$$

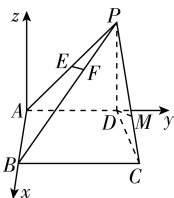
因为 $\overrightarrow{PA} = (0, -2, -2)$, 且 E 为 PA 的中点, 所以 $\overrightarrow{PE} = (0, -1, -1)$, 所以

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{PF} - \overrightarrow{PE} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

因为 $\overrightarrow{PD} = (0, 0, -2)$, 所以 $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{PM} -$

$$\overrightarrow{PD} = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

故 $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DM}$, 又 $E \notin DM$, 所以 $EF \parallel DM$.



方法二: 因为 E 为 PA 的中点, 所以

$$\overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PA}. \text{ 因为 } \overrightarrow{PF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PM} =$$

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}, \text{ 所以 } \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{PF} - \overrightarrow{PE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} -$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{PA},$$

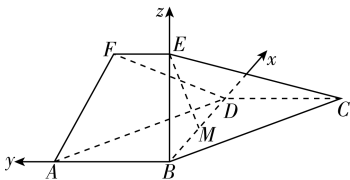
$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} -$$

$$\overrightarrow{PA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}) - \overrightarrow{PA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} =$$

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}. \text{ 所以 } \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DM}, \text{ 又 } E \notin$$

DM , 所以 $EF \parallel DM$.

7. 【证明】方法一: $\because EB \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \perp BD$, \therefore 以 B 为原点, 分别以 BD , BA , BE 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图①所示的空间直角坐标系.



图①

$$\because AB = 2, EB = \sqrt{3}, EF = 1, BC = \sqrt{13},$$



$$\therefore B(0,0,0), D(3,0,0), A(0,2,0),$$

$$E(0,0,\sqrt{3}), F(0,1,\sqrt{3}), M\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{EM} = \left(\frac{3}{2}, 0, -\sqrt{3}\right), \overrightarrow{AD} = (3, -2,$$

$$0), \overrightarrow{AF} = (0, -1, \sqrt{3}).$$

设平面 ADF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 3x_1 - 2y_1 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AF} = -y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0, \end{cases}$$

令 $y_1 = 3$, 得 $\mathbf{n} = (2, 3, \sqrt{3})$.

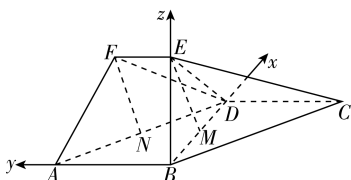
$$\text{又 } \overrightarrow{EM} \cdot \mathbf{n} = 3 - 3 = 0, \therefore \mathbf{n} \perp \overrightarrow{EM}.$$

又 $EM \not\subset$ 平面 ADF , $\therefore EM \parallel$ 平面 ADF .

方法二: 取 AD 的中点为 N , 连接 FN ,

同方法一建立空间直角坐标系, 如图

②所示,



图②

$$\text{则 } E(0,0,\sqrt{3}), F(0,1,\sqrt{3}), M\left(\frac{3}{2},$$

$$0,0\right), A(0,2,0), D(3,0,0),$$

$$\therefore N \text{ 为 } AD \text{ 的中点}, \therefore N\left(\frac{3}{2}, 1, 0\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{FN} = \left(\frac{3}{2}, 0, -\sqrt{3}\right), \overrightarrow{EM} = \left(\frac{3}{2}, 0,$$

$$-\sqrt{3}\right), \text{故 } \overrightarrow{FN} = \overrightarrow{EM}. \therefore F \notin EM, \therefore FN \parallel$$

EM .

$\therefore FN \subset$ 平面 ADF , $EM \not\subset$ 平面 ADF ,

$\therefore EM \parallel$ 平面 ADF .

方法三: 连接 DE , 如图②, $\therefore M$ 为 BD

$$\text{的中点}, \therefore \overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED}).$$

$$\therefore EF = 1, AB = 2, AB \parallel EF, \therefore \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{FE},$$

$$\therefore \overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} +$$

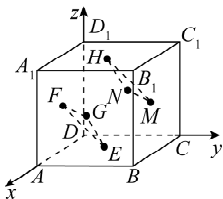
$$\overrightarrow{AB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{FD} - \overrightarrow{FE}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FD}, \text{故}$$

$\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FD}$ 共面. $\therefore FA, FD \subset$ 平面



$ADF, FA \cap FD = F, EM \not\subset \text{平面 } ADF,$
 $\therefore EM // \text{平面 } ADF.$

8. 【证明】方法一: 如图所示, 建立空间直角坐标系, 不妨设该正方体的棱长为 2, 则 $E(1, 1, 0), F(1, 0, 1), G(2, 1, 1), H(1, 1, 2), M(1, 2, 1), N(0, 1, 1).$



$$\therefore \overrightarrow{EF} = (0, -1, 1), \overrightarrow{EG} = (1, 0, 1),$$

$$\overrightarrow{HM} = (0, 1, -1), \overrightarrow{HN} = (-1, 0, -1).$$

设 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$ 分别是平面 EFG 和平面 HMN 的法向量.

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{EF} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{EG} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -y_1 + z_1 = 0, \\ x_1 + z_1 = 0, \end{cases}$$

令 $x_1 = 1$, 得 $\mathbf{m} = (1, -1, -1).$

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{HM} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{HN} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} y_2 - z_2 = 0, \\ -x_2 - z_2 = 0, \end{cases}$$

令 $x_2 = 1$, 得 $\mathbf{n} = (1, -1, -1).$

$\therefore \mathbf{m} = \mathbf{n}$, 即 $\mathbf{m} // \mathbf{n}$, 故平面 $EFG //$ 平面 HMN .

方法二: 由方法一可得, $\overrightarrow{EF} = (0, -1, 1), \overrightarrow{EG} = (1, 0, 1), \overrightarrow{HM} = (0, 1, -1),$
 $\overrightarrow{HN} = (-1, 0, -1)$, 故 $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{HM},$
 $\overrightarrow{EG} = -\overrightarrow{HN},$

$\therefore E \notin HM, E \notin HN, \therefore EF // HM, EG // HN.$ $\therefore EF, EG \subset \text{平面 } EFG, HM, HN \subset$
 平面 $HMN, EF \cap EG = E, \therefore \text{平面 } EFG //$
 平面 $HMN.$

方法三: 由方法一可得, 平面 EFG 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (1, -1, -1), \overrightarrow{HM} =$
 $(0, 1, -1), \overrightarrow{HN} = (-1, 0, -1), \mathbf{m} \cdot$
 $\overrightarrow{HM} = 0 - 1 + 1 = 0, \therefore \mathbf{m} \perp \overrightarrow{HM},$

$$\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{HN} = -1 + 0 + 1 = 0, \therefore \mathbf{m} \perp \overrightarrow{HN}.$$

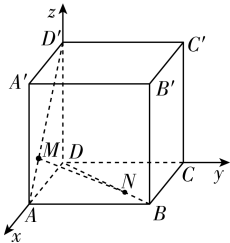
$\therefore HM \cap HN = H, HM, HN \subset \text{平面 } HMN,$

$\therefore \mathbf{m} \perp \text{平面 } HMN, \therefore \text{平面 } EFG //$
 平面 $HMN.$

9. 【证明】方法一: 以 D 为坐标原点, 分别以 DA, DC, DD_1 所在直线为 x, y, z



轴建立空间直角坐标系,如图所示.



设该正方体的棱长为 1, $\frac{AM}{AD'} = \frac{BN}{BD} = \lambda$,

则 $D(0,0,0), A(1,0,0), B(1,1,0), D'(0,0,1)$,

$\overrightarrow{AD'} = (-1,0,1), \overrightarrow{BD} = (-1,-1,0)$, 设 $M(x_1, y_1, z_1), N(x_2, y_2, z_2)$,

由 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{BN} = \lambda \overrightarrow{BD}$, 可得 $M(1-\lambda, 0, \lambda), N(1-\lambda, 1-\lambda, 0), \overrightarrow{MN} = (0, 1-\lambda, -\lambda), \overrightarrow{AD} = (-1, 0, 0), \therefore \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \therefore MN \perp AD$.

方法二: 设 $\frac{AM}{AD'} = \frac{BN}{BD} = \lambda, \overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{b},$

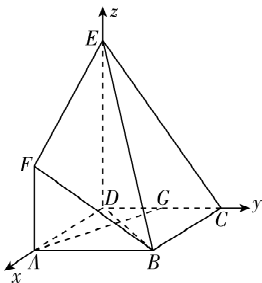
$\overrightarrow{AA'} = \mathbf{c}$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0,$

$\therefore \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BD} - \lambda \overrightarrow{AD'} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \lambda(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (1-\lambda)\mathbf{a} - \lambda\mathbf{c}$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{MN} = \mathbf{b} \cdot [(1-\lambda)\mathbf{a} - \lambda\mathbf{c}] = (1-\lambda)\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \lambda\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0,$

$\therefore \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{MN}, \therefore MN \perp AD$.

10. 【证明】方法一: 由题可知 DA, DC, DE 两两垂直, 如图, 以 D 为坐标原点, DA, DC, DE 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系, 则 $D(0,0,0), A(1,0,0), E(0,0,2),$

$B(1, \sqrt{2}, 0), G(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.



则 $\overrightarrow{AG} = (-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), \overrightarrow{DE} = (0, 0, 2),$

$\overrightarrow{DB} = (1, \sqrt{2}, 0),$

设平面 DBE 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y,$



$z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{DE} = 2z = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{DB} = x + \sqrt{2}y = 0, \end{cases} \quad \text{令 } x = \sqrt{2}, \text{ 则}$$

$y = -1$, 故 $\vec{n} = (\sqrt{2}, -1, 0)$.

易得 $-\sqrt{2}\vec{AG} = \vec{n}$, $\therefore \vec{n} \parallel \vec{AG}$, $\therefore AG \perp$ 平面 DBE .

方法二: 由方法一, 可得 $\vec{AG} =$

$$\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \vec{DE} = (0, 0, 2), \vec{DB} =$$

$$(1, \sqrt{2}, 0),$$

$$\therefore \vec{DE} \cdot \vec{AG} = 0, \vec{DB} \cdot \vec{AG} = 0,$$

$$\therefore DE \perp AG, DB \perp AG.$$

又 $DB \cap DE = D$, $DB, DE \subset$ 平面 DBE ,

$\therefore AG \perp$ 平面 DBE .

方法三: $\because DE \perp$ 平面 $ABCD$, $AG \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore AG \perp DE$.

$\vec{AG} = \vec{AD} + \vec{DG}$, $\vec{DB} = \vec{DA} + \vec{AB}$, 故 $\vec{AG} \cdot$

$$\vec{DB} = -\vec{AD}^2 + \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{DG} \cdot \vec{DA} + \vec{DG} \cdot$$

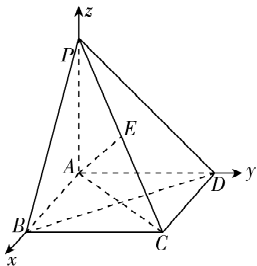
$$\vec{AB} = -1 + 0 + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} \times 1 = 0,$$

$$\therefore AG \perp DB. \because DB \cap DE = D, DB, DE \subset$$

平面 DBE , $\therefore AG \perp$ 平面 DBE .

11.【证明】如图, 以 A 为原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A(0, 0, 0), B(2, 0, 0), C(2, 2, 0), D(0, 2, 0), P(0, 0, 2)$.



(1) 因为 E 是 PC 的中点, 所以点 E 的坐标为 $(1, 1, 1)$, 所以 $\vec{AE} = (1, 1, 1)$.

又因为 $\vec{PD} = (0, 2, -2)$, 所以 $\vec{AE} \cdot \vec{PD} = 1 \times 0 + 1 \times 2 + 1 \times (-2) = 0$, 所以 $\vec{AE} \perp \vec{PD}$, 即 $AE \perp PD$.

(2) 因为底面 $ABCD$ 是正方形, 所以 $BD \perp AC$.



因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $BD \perp PA$.

因为 $AC \cap PA = A$, $AC, PA \subset$ 平面 PAC ,
所以 $BD \perp$ 平面 PAC .

所以平面 PAC 的一个法向量为 $\vec{BD} = (-2, 2, 0)$.

设平面 PBD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{PB} = (2, 0, -2)$, $\vec{PD} = (0, 2, -2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{PB} = 2x_1 - 2z_1 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{PD} = 2y_1 - 2z_1 = 0, \end{cases}$$

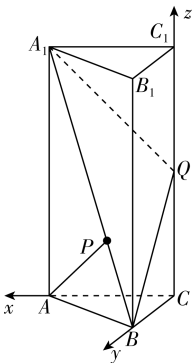
取 $z_1 = 1$, 则 $x_1 = 1, y_1 = 1$, 所以平面 PBD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$.

因为 $\mathbf{n} \cdot \vec{BD} = 1 \times (-2) + 1 \times 2 + 1 \times 0 = 0$, 所以 $\mathbf{n} \perp \vec{BD}$, 所以平面 $PBD \perp$ 平面 PAC .

12. 【解】 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,

$CC_1 \perp$ 平面 ABC , $BC \perp AC$,

故以 C 为原点, 以 CA, CB, CC_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示.



因为 $CA = CB = \frac{1}{2}AA_1 = 1$, Q 为棱 C_1C 的中点,

所以 $B(0, 1, 0)$, $Q(0, 0, 1)$, $A_1(1, 0, 2)$, $A(1, 0, 0)$,

则 $\vec{BA_1} = (1, -1, 2)$, $\vec{A_1Q} = (-1, 0, -1)$, $\vec{AB} = (-1, 1, 0)$,

又 $\vec{BP} = \lambda \vec{BA_1}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), 则 $\vec{BP} = (\lambda, -\lambda, 2\lambda)$,

所以 $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP} = (\lambda - 1, 1 - \lambda, 2\lambda)$,

若 $AP \perp$ 平面 A_1BQ ,



$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BA_1} = 0, \\ \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{A_1Q} = 0, \end{cases}$$

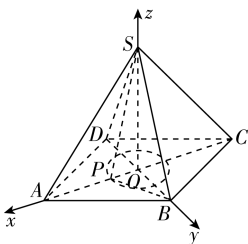
$$\text{即} \begin{cases} \lambda - 1 - (1 - \lambda) + 4\lambda = 0, \\ -(\lambda - 1) - 2\lambda = 0, \end{cases} \text{解得 } \lambda = \frac{1}{3},$$

所以线段 A_1B 上存在点 P , 使得

$$AP \perp \text{平面 } A_1BQ, \text{ 此时 } \lambda = \frac{1}{3}.$$

6.3.3 空间角的计算

1. A 【解析】根据题意, 连接 AC, BD , $AC \cap BD = O$, 连接 SO , 如图所示.



由四棱锥 $S-ABCD$ 为正四棱锥, 可得 $SO \perp$ 底面 $ABCD$.

由底面边长为 $2\sqrt{2}$, 可得 $AC = 4$, 所以 $AO = 2$.

在 $\text{Rt} \triangle SOA$ 中, $SA = 4$, $AO = 2$, 可得 $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = 2\sqrt{3}$,

在 $\text{Rt} \triangle SOP$ 中, 由 $SP = \sqrt{13}$, 可得 $OP = \sqrt{SP^2 - SO^2} = 1$,

即点 P 在以 O 为圆心, 1 为半径的圆上,

所以当点 P 为圆 O 与 OA 的交点时, A, P 两点间距离最小, 最小值为 $AO - OP = 1$.

以 O 为坐标原点, OA, OB, OS 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,

可得 $P(1, 0, 0), B(0, 2, 0), S(0, 0, 2\sqrt{3}), C(-2, 0, 0)$, 则 $\overrightarrow{BP} = (1, -2, 0), \overrightarrow{SC} = (-2, 0, -2\sqrt{3})$, 可得 $|\cos \langle \overrightarrow{BP},$

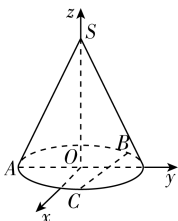
$$\overrightarrow{SC} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{SC}|}{|\overrightarrow{BP}| \cdot |\overrightarrow{SC}|} = \frac{|-2|}{\sqrt{5} \times 4} = \frac{\sqrt{5}}{10},$$

所以直线 BP 与直线 SC 所成角的余

弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{10}$. 故选 A.



2. D 【解析】如图,设圆锥的底面圆心为点 O ,分别以 AO, OS 所在直线为 y, z 轴,以过点 O 且与 AO 垂直的直线为 x 轴建立空间直角坐标系.



依题意, $A(0, -1, 0), S(0, 0, \sqrt{3}), B, C$ 是圆锥底面圆周上的两个动点,

设 $B(\cos \alpha, \sin \alpha, 0), C(\cos \beta, \sin \beta, 0)$, 其中 $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$,

则 $\overrightarrow{SA} = (0, -1, -\sqrt{3})$,

$\overrightarrow{BC} = (\cos \beta - \cos \alpha, \sin \beta - \sin \alpha, 0)$,

设直线 SA 与 BC 的夹角为 θ ,

则 $\cos \theta = |\cos \langle \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC} \rangle|$

$$= \frac{|\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$$

$$= \frac{|\sin \alpha - \sin \beta|}{2 \sqrt{(\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2}}$$

$$= \frac{2 \left| \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right|}{2 \sqrt{2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}}$$

$$= \frac{\left| \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right|}{\sqrt{2 - 2\cos(\alpha - \beta)}}$$

$$= \frac{\left| \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}\right)}}$$

$$= \frac{1}{2} \left| \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right|,$$

因为 $0 \leq \frac{\alpha + \beta}{2} < 2\pi$, 所以当 $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \pm 1$

时, $\left| \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right|$ 取得最大值 1, 此时

$\cos \theta$ 取得最大值 $\frac{1}{2}$. 故选 D.

3. C 【解析】选项 A, 连接 B_1D_1 (图略),

$\because A_1C_1 \perp B_1D_1, A_1C_1 \perp BB_1, B_1D_1 \cap BB_1 = B_1$, 且 $B_1D_1, BB_1 \subset$ 平面 BB_1D_1 ,

$\therefore A_1C_1 \perp$ 平面 BB_1D_1 , 又 $BD_1 \subset$ 平面 $BB_1D_1, \therefore A_1C_1 \perp BD_1$, 同理可得 $DC_1 \perp$

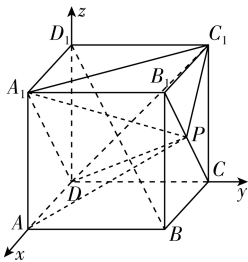


BD_1 , 又 $A_1C_1 \cap DC_1 = C_1$, 且 $A_1C_1, DC_1 \subset$ 平面 A_1C_1D , \therefore 直线 $BD_1 \perp$ 平面 A_1C_1D , 故 A 正确;

选项 B, $\because A_1D \parallel B_1C, A_1D \subset$ 平面 $A_1C_1D, B_1C \not\subset$ 平面 $A_1C_1D, \therefore B_1C \parallel$ 平面 A_1C_1D , 又点 P 在线段 B_1C 上运动, \therefore 点 P 到平面 A_1C_1D 的距离为定值, 又 $\triangle A_1C_1D$ 的面积是定值, \therefore 三棱锥 $P-A_1C_1D$ 的体积为定值, 故 B 正确;

选项 C, 连接 AB_1, AC (图略), $\because A_1D \parallel B_1C, \therefore$ 异面直线 AP 与 A_1D 所成角的大小和直线 AP 与直线 B_1C 的夹角相等, 易知 $\triangle AB_1C$ 为等边三角形, 当 P 为 B_1C 的中点时, $AP \perp B_1C$, 当 P 与点 B_1 或 C 重合时, 直线 AP 与直线 B_1C 的夹角为 $\frac{\pi}{3}, \therefore$ 异面直线 AP 与 A_1D 所成角的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, 故 C 错误;

选项 D, 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图,



设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, $P(a, 1, a), 0 \leq a \leq 1$, 则 $C_1(0, 1, 1), B(1, 1, 0), D_1(0, 0, 1), \therefore \overrightarrow{C_1P} = (a, 0, a-1), \overrightarrow{D_1B} = (1, 1, -1)$, 由 A 选项可知 $\overrightarrow{D_1B} = (1, 1, -1)$ 是平面 A_1C_1D 的一个法向量,

\therefore 直线 C_1P 与平面 A_1C_1D 所成角的正弦

$$\text{值为 } \frac{|\overrightarrow{C_1P} \cdot \overrightarrow{D_1B}|}{|\overrightarrow{C_1P}| \cdot |\overrightarrow{D_1B}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (a-1)^2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}},$$



\therefore 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 直线 C_1P 与平面 A_1C_1D

所成角的正弦值最大, 最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 故

D 正确. 故选 C.

4. (1) 【证明】如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, 取点 P 并作 $PG \perp AB$, 垂足为 G , 作 $PH \perp AC$, 垂足为 H ,

因为 $PG \perp AB$, 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 ABC , 且平面 $ABB_1A_1 \cap$ 平面 $ABC = AB$, $PG \subset$ 平面 ABC ,

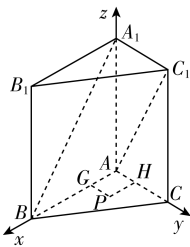
所以 $PG \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 因为 $AA_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $PG \perp AA_1$.

又因为 $PH \perp AC$, 平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 ABC , 平面 $AA_1C_1C \cap$ 平面 $ABC = AC$,

$PH \subset$ 平面 ABC , 所以 $PH \perp$ 平面 AA_1C_1C .

因为 $AA_1 \subset$ 平面 AA_1C_1C , 所以 $PH \perp AA_1$,

因为 $PG \cap PH = P$, 且 $PG, PH \subset$ 平面 ABC , 所以 $AA_1 \perp$ 平面 ABC .



(2) 【解】因为 $AB^2 + AC^2 = BC^2$, 所以 $AB \perp AC$,

由(1)知, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 又因为 $AB \subset$ 平面 ABC , $AC \subset$ 平面 ABC ,

所以 $AB \perp AA_1$, $AC \perp AA_1$,

以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系.

依题意 $A(0, 0, 0), B(2, 0, 0), A_1(0, 0, 3), C_1(0, 1, 3)$,

则 $\overrightarrow{A_1B} = (2, 0, -3), \overrightarrow{AC_1} = (0, 1, 3)$,

设异面直线 A_1B 与 AC_1 所成的角为 θ ,

则 $\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{AC_1}|}{|\overrightarrow{A_1B}| |\overrightarrow{AC_1}|} = \frac{9}{\sqrt{13} \times \sqrt{10}} =$



$$\frac{9}{\sqrt{130}},$$

$$\text{所以 } \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{\sqrt{130}}\right)^2} = \frac{7\sqrt{130}}{130},$$

所以异面直线 A_1B 与 AC_1 所成角的正

$$\text{弦值为 } \frac{7\sqrt{130}}{130}.$$

5. (1) 【证明】记 AB 与 CD 交于点 F , 如图所示, 连接 B_1F, OC, BC .

因为 AB 是下底面圆 O 的直径, 且 $\triangle ACD$ 为圆 O 的内接正三角形,

所以 AB 垂直平分 CD , $OC = 2$, 在

$\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin 60^\circ} =$

$$4, \text{ 所以 } AC = 2\sqrt{3}, CF = \sqrt{3},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle OCF \text{ 中, } OF = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1.$$

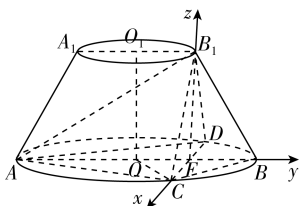
$$\text{因为 } AB \parallel A_1B_1, AB = 2A_1B_1 = 4,$$

$$\text{所以 } OF \parallel O_1B_1, OF = O_1B_1,$$

故四边形 OFB_1O_1 为平行四边形, 故

$$OO_1 \parallel FB_1.$$

又 $OO_1 \not\subset$ 平面 B_1CD , $FB_1 \subset$ 平面 B_1CD , 故 $OO_1 \parallel$ 平面 B_1CD .



(2) 【解】由(1)知, $OO_1 \parallel FB_1$, 则 $FB_1 \perp$ 平面 ACD , 且 AB 垂直平分 CD , 故以 F 为坐标原点, FC, FB, FB_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

$$\text{则 } A(0, -3, 0), B_1(0, 0, \sqrt{3}), C(\sqrt{3}, 0, 0), D(-\sqrt{3}, 0, 0),$$

$$\overrightarrow{CD} = (-2\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{AB_1} = (0, 3, \sqrt{3}),$$

$$\overrightarrow{AD} = (-\sqrt{3}, 3, 0).$$

设平面 AB_1D 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{AB_1} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{m} = 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} 3y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0, \\ -\sqrt{3}x_1 + 3y_1 = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } y_1 = 1, \text{ 则 } x_1 = \sqrt{3}, z_1 = -\sqrt{3}, \text{ 故 } \mathbf{m} =$$



$$(\sqrt{3}, 1, -\sqrt{3}).$$

记直线 CD 与平面 AB_1D 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{CD}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{CD} \cdot \mathbf{m}|}{|\overrightarrow{CD}| |\mathbf{m}|} =$$

$$\frac{6}{2\sqrt{3} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

故直线 CD 与平面 AB_1D 所成角的正

弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

6.【解】(1) 由题意可得 $PA \perp AB, PA \perp AD, AB \perp AD$, 以 A 为坐标原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则有 $C(4, 4, 0), D(0, 4, 0), P(0, 0, 4), E(4, 0, 2)$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{CE} = (0, -4, 2), \overrightarrow{CP} = (-4, -4, 4), \overrightarrow{DP} = (0, -4, 4).$$

设平面 PCE 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

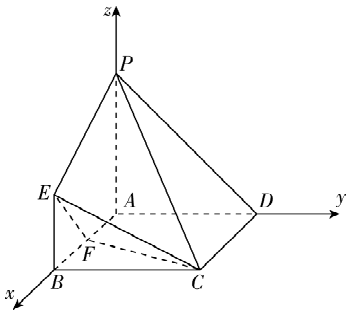
$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CE} = -4y + 2z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CP} = -4x - 4y + 4z = 0, \end{cases}$$

令 $y = 1$, 则 $z = 2, x = 1$, 所以 $\mathbf{n} = (1, 1, 2)$.

设直线 PD 与平面 PCE 所成的角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{DP} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DP}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{DP}|} =$$

$$\frac{4}{4\sqrt{2} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$



(2) 依题意可得 $F(2, 0, 0)$, 则 $\overrightarrow{CF} = (-2, -4, 0)$.

设平面 CEF 的法向量为 $\mathbf{m} = (a, b, c)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CF} = -2a - 4b = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CE} = -4b + 2c = 0, \end{cases}$$

令 $b = 1$, 则 $a = -2, c = 2$, 所以 $\mathbf{m} = (-2,$

$1, 2)$, 则 $\cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.



显然二面角 $P-CE-F$ 为锐二面角,

所以二面角 $P-CE-F$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

7. (1) 【证明】在 $\text{Rt} \triangle ADE$ 中, $DA = DE = \sqrt{2}$, 所以 $DO \perp AE$, $DO = 1$.

在 $\triangle OEC$ 中, $OE = \frac{1}{2}AE = 1$, $EC = \sqrt{2}$,

$$\angle OEC = \frac{3\pi}{4},$$

由余弦定理可得 $OC^2 = 1 + 2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$, 所以 $OC = \sqrt{5}$,

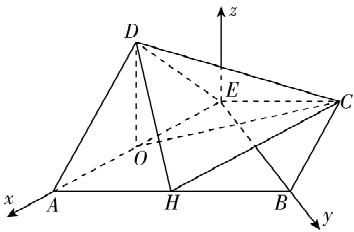
在 $\triangle DOC$ 中, $DC^2 = 6 = DO^2 + OC^2$, 所以 $DO \perp OC$.

(2) 【解】存在, 且 H 为线段 AB 的中点. 理由如下:

连接 BE , 易得 $\angle AEB = \frac{\pi}{2}$, 又因为

$DO \perp AE$, $DO \perp OC$, $AE \cap OC = O$, $OC, AE \subset$ 平面 $ABCE$, 所以 $DO \perp$ 平面 $ABCE$.

以 E 为坐标原点, EA, EB 所在直线分别为 x 轴、 y 轴, 过点 E 且平行于 DO 的直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $D(1, 0, 1)$, $C(-1, 1, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$.

易知平面 ADE 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (0, 1, 0)$,

因为在平面直角坐标系 xEy 中, 直线 AB 的方程为 $x + y = 2$,

所以设点 H 的坐标为 $(t, 2-t, 0)$, $t \in [0, 2]$, 则 $\overrightarrow{HC} = (-1-t, t-1, 0)$, $\overrightarrow{DC} = (-2, 1, -1)$.

设平面 DHC 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y,$

$$z), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{HC} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \end{cases}$$



$$\text{即} \begin{cases} (-1-t)x + (t-1)y = 0, \\ -2x + y - z = 0, \end{cases}$$

令 $y = 1+t$, 则 $x = t-1, z = 3-t$, 所以 $\mathbf{n}_2 = (t-1, 1+t, 3-t)$,

$$\text{由已知, } \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \left| \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} \right| = \left| \frac{1+t}{1 \times \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (3-t)^2}} \right|,$$

解得 $t=1$ 或 $t=9$ (舍去), 所以在线段 AB 上存在点 H 满足题意, 此时 H 是线段 AB 的中点.

8. A 【解析】设平面 α, β, γ 的单位法向量分别为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, 直线 l 的单位方向向量为 \mathbf{l} .

根据 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = l$ 可知, 向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{l}$ 两两垂直, 所以 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{l}\}$ 可以构成空间直角坐标系的一个单位正交基底, 故设 $\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{l}$.

因为 γ 与 α 所成的锐二面角为 45° , 所

$$\text{以 } \cos \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = 45^\circ, \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = (x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{l}) \cdot \mathbf{a} = x, \text{ 所以 } x =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 同理可得 } z = \frac{1}{2}.$$

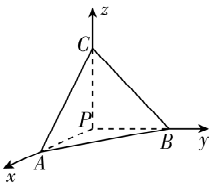
$$\text{因为 } \mathbf{c}^2 = (x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{l})^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

$$\text{所以 } y = \pm \frac{1}{2}, \text{ 故所求二面角的大小为}$$

60° . 故选 A.

6.3.4 空间距离的计算

1. D 【解析】方法一(向量法): 以 P 为坐标原点, 分别以 PA, PB, PC 所在的直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



$$\text{则 } P(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0),$$

$$C(0,0,1), \overrightarrow{PA} = (1,0,0), \overrightarrow{AB} = (-1,1,0),$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1,0,1).$$



设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$,

$$\text{由} \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} -x + y = 0, \\ -x + z = 0, \end{cases}$$

令 $x = 1$, 则 $y = z = 1$, 则平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = (1, 1, 1)$.

所以点 P 到平面 ABC 的距离 $d =$

$$\frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ 故选 D.}$$

方法二(等体积法): 由题易知 $AB = BC = AC = \sqrt{2}$, 则 $\triangle ABC$ 为等边三角形,

$$\text{且面积为 } \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

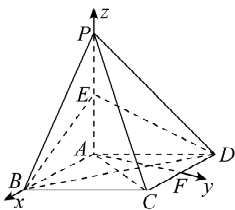
设点 P 到平面 ABC 的距离为 d , 则有

$$V_{P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot d = V_{C-APB} = \frac{1}{3} S_{\triangle APB} \cdot$$

$$CP = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}, \text{ 解得 } d = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选 D.

- 2. A** 【解析】连接 AC , 取 CD 的中点 F , 连接 AF , 易知 $AF \perp CD$, 又 $AB \parallel CD$, 故 $AB \perp AF$, 又 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 故以 A 为坐标原点, 分别以 AB, AF, AP 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示, 则 $B(4, 0, 0), C(2, 2\sqrt{3}, 0), D(-2, 2\sqrt{3}, 0), P(0, 0, 4), E(0, 0, 2)$.



设平面 BED 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$,

$$\text{由 } \overrightarrow{BE} = (-4, 0, 2), \overrightarrow{DE} = (2, -2\sqrt{3}, 2),$$

$$\text{得} \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} -4x + 2z = 0, \\ 2x - 2\sqrt{3}y + 2z = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } z = 2, \text{ 解得 } x = 1, y = \sqrt{3}, \text{ 则 } \boldsymbol{n} = (1, \sqrt{3},$$

$$2). \therefore \overrightarrow{PC} = (2, 2\sqrt{3}, -4),$$

$$\therefore \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 2 + 6 - 8 = 0,$$

$\therefore \boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{PC}$, 又 $PC \not\subset$ 平面 BED , $\therefore PC \parallel$ 平面 BED ,

\therefore 侧棱 PC 与平面 BED 的距离就是点



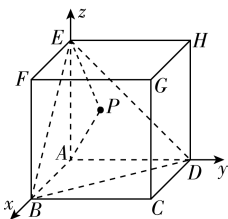
P 到平面 BED 的距离.

$\because \vec{EP} = (0, 0, 2), \therefore$ 点 P 到平面 BED

的距离 $d = \frac{|\vec{EP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{4}{\sqrt{1+3+4}} = \sqrt{2},$

即 PC 到平面 BED 的距离为 $\sqrt{2}$. 故选 A.

3. C 【解析】如图, 连接 EP , 以 A 为坐标原点, AB, AD, AE 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$, 则 $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), D(0, 1, 0), E(0, 0, 1)$.



则 $\vec{AP} = \frac{1}{4}(1, 0, 0) + 2\lambda(0, 1, 0) +$

$\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)(0, 0, 1) = \left(\frac{1}{4}, 2\lambda, \frac{1}{2} - \lambda\right),$

则 $P\left(\frac{1}{4}, 2\lambda, \frac{1}{2} - \lambda\right), \vec{EP} = \left(\frac{1}{4}, 2\lambda, -\frac{1}{2} - \lambda\right), \vec{EB} = (1, 0, -1), \vec{DB} = (1, -1, 0).$

设平面 EBD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z),$

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{EB} = x - z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{DB} = x - y = 0, \end{cases}$

令 $x = 1$, 则 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$, 又 $EP \subset$ 平面 EBD ,

则 $\vec{EP} \perp \mathbf{n}$, 即 $\vec{EP} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{4} + 2\lambda +$

$\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) = 0$, 得 $\lambda = \frac{1}{4}$, 故 $P\left(\frac{1}{4},$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, 所以 $\vec{AP} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, 又

$\vec{AB} = (1, 0, 0),$

则 $\cos \angle PAB = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AP}}{|\vec{AB}| |\vec{AP}|}$

$= \frac{\frac{1}{4}}{1 \times \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}}}$

$= \frac{\sqrt{6}}{6},$



$$\text{故 } \sin \angle PAB = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{6},$$

所以点 P 到直线 AB 的距离为 $|\overrightarrow{AP}|$.

$$\sin \angle PAB = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}} \times \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{4}. \text{ 故选 C.}$$

4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】依题意, 平行平面 α, β 间的

距离即为点 O 到平面 β 的距离,

而 $\overrightarrow{OA} = (2, 1, 1)$, 所以平行平面 α, β

$$\text{间的距离 } d = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OA}|}{|\mathbf{n}|} =$$

$$\frac{|-1 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 【解析】作出正四棱锥 $P-A'B'C'D'$,

分别取 $A'D', A'B'$ 的中点 E, F , 连接

OE, OF , 易知 OP, OE, OF 两两垂直, 以

底面中心 O 为坐标原点, 分别以 OE ,

OF, OP 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建

立空间直角坐标系 $O-xyz$, 如图所示,

则 $A'(1, 1, 0), B'(-1, 1, 0), P(0, 0,$

$2)$, 设平面 $PA'B'$ 的方程为 $Ax + By + Cz +$

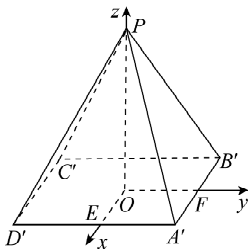
$D = 0$, 将以上 3 个坐标代入计算, 得

$$A = 0, B = -D, C = -\frac{1}{2}D, \text{ 所以平面}$$

$$PA'B' \text{ 的方程为 } -Dy - \frac{1}{2}Dz + D = 0, \text{ 即}$$

$2y + z - 2 = 0$, 所以底面中心 O 到侧面的

$$\text{距离 } d = \frac{|2 \times 0 + 0 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$



6. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 【解析】连接 BP , 因为三棱柱

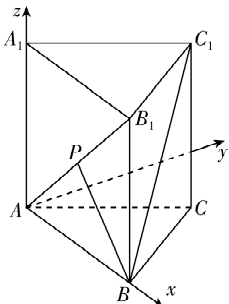
$ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱, 所以 $AA_1 \perp$

平面 ABC , 以 A 为原点, AB, AA_1 所在

直线分别为 x 轴、 z 轴, 在平面 ABC 内



过点 A 作与 AB 垂直的直线为 y 轴, 建立空间直角坐标系, 如图.



因为正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 1, 则 $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$,

$B_1(1,0,1)$, $C_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, 所以

$$\overrightarrow{AB_1} = (1, 0, 1), \overrightarrow{BC_1} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right).$$

因为动点 P 在线段 AB_1 上, 则令 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB_1} = (t, 0, t)$, $0 \leq t \leq 1$,

即有点 $P(t, 0, t)$, 所以 $\overrightarrow{BP} = (t-1, 0, t)$, 则 $|\overrightarrow{BP}|^2 = (t-1)^2 + t^2 = 2t^2 - 2t + 1$,

$$\text{从而 } \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(t+1),$$

因此点 P 到直线 BC_1 的距离

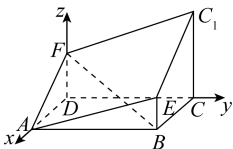
$$\begin{aligned} d &= \sqrt{|\overrightarrow{BP}|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{BC_1}|}\right)^2} \\ &= \sqrt{2t^2 - 2t + 1 - \frac{1}{8}(t^2 + 2t + 1)} \\ &= \sqrt{\frac{15}{8}t^2 - \frac{9}{4}t + \frac{7}{8}} \\ &= \sqrt{\frac{15}{8}\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}} \geq \frac{\sqrt{5}}{5}, \end{aligned}$$

当且仅当 $t = \frac{3}{5}$ 时取等号,

所以线段 AB_1 上的动点 P 到直线 BC_1 的距离的最小值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

7. 【解】(1) 以 D 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $B(2, 4, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$, $E(2, 4, 1)$, $C_1(0, 4, 3)$.

设 $F(0, 0, z)$ ($z > 0$).





由题意得四边形 AEC_1F 为平行四边形,

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EC_1}, \therefore (-2, 0, z) = (-2, 0, 2),$$

$$\therefore z = 2, \therefore F(0, 0, 2),$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} = (-2, -4, 2), \text{ 于是 } |\overrightarrow{BF}| = 2\sqrt{6},$$

即 BF 的长为 $2\sqrt{6}$.

(2) 设 $\mathbf{n} = (x, y, t)$ 为平面 AEC_1F 的法向量, 由 (1) 可知 $\overrightarrow{AE} = (0, 4, 1)$, $\overrightarrow{AF} = (-2, 0, 2)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AF} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 4y + t = 0, \\ -2x + 2t = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 则 } t = 1, y = -\frac{1}{4},$$

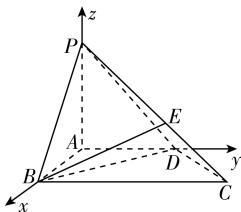
$$\therefore \mathbf{n} = \left(1, -\frac{1}{4}, 1\right).$$

$$\text{又 } \overrightarrow{CC_1} = (0, 0, 3),$$

\therefore 点 C 到平面 AEC_1F 的距离 $d =$

$$\frac{|\overrightarrow{CC_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{3}{\frac{\sqrt{33}}{4}} = \frac{4\sqrt{33}}{11}.$$

8. 【解】 (1) 以 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}\}$ 为单位正交基底, 建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.



因为 $BC = 2, AP = AB = AD = 1$,

所以 $B(1, 0, 0), P(0, 0, 1), D(0, 1, 0), C(1, 2, 0)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{PB} = (1, 0, -1), \overrightarrow{PD} = (0, 1, -1), \overrightarrow{DC} = (1, 1, 0).$$

设平面 PBD 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{PB} = x_1 - z_1 = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{PD} = y_1 - z_1 = 0, \end{cases} \text{ 取 } x_1 = 1, \text{ 得}$$

$$\mathbf{n}_1 = (1, 1, 1).$$

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,



$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{DC} = x_2 + y_2 = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{PD} = y_2 - z_2 = 0, \end{cases} \quad \text{取 } x_2 = 1, \text{ 得}$$

$$\vec{n}_2 = (1, -1, -1).$$

$$\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{-1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\frac{1}{3},$$

设二面角 $B-PD-C$ 的大小为 θ ,

$$\text{所以 } \sin \theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

故二面角 $B-PD-C$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(2) 由(1)知, $\vec{PC} = (1, 2, -1)$, 设 $\vec{PE} = \lambda \vec{PC} = (\lambda, 2\lambda, -\lambda) (0 < \lambda < 1)$, 则 $\vec{BE} = \vec{PE} - \vec{PB} = (\lambda - 1, 2\lambda, -\lambda + 1)$.

因为异面直线 PD 与 BE 所成角的大小为 60° ,

$$\text{所以 } \cos 60^\circ = |\cos \langle \vec{PD}, \vec{BE} \rangle| = \frac{|2\lambda + \lambda - 1|}{\sqrt{2} \times \sqrt{2(\lambda - 1)^2 + 4\lambda^2}} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } \lambda = \frac{2}{3}$$

或 $\lambda = 0$ (舍去).

$$\text{此时 } \vec{PE} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right),$$

所以点 E 到平面 PBD 的距离 $d =$

$$\frac{|\vec{PE} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{n}_1|} = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

9. (1) 【证明】过点 G 作 $GH \parallel CB$, 交底面弧 AB 于点 H , 连接 HB .

易知四边形 $HBCG$ 为平行四边形, 所以 $HB \parallel CG$, 又 G 为弧 CD 的中点, 则 H 是弧 AB 的中点, 所以 $\angle HBA = 45^\circ$, 而由题设知 $\angle ABF = 45^\circ$, 则 $\angle HBF = \angle HBA + \angle ABF = 90^\circ$, 所以 $FB \perp HB$, 即 $FB \perp CG$.

因为 $CB \perp$ 平面 ABF , $FB \subset$ 平面 ABF , 所以 $CB \perp FB$, 又 $CB \cap CG = C$, $CB, CG \subset$ 平面 BCG ,

所以 $FB \perp$ 平面 BCG , 又 $FB \subset$ 平面 BDF , 所以平面 $BDF \perp$ 平面 BCG .

(2) 【解】由题意, 以 A 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$, 连接 DG , 易知半圆柱的底面半径为

$$\frac{1}{2}AB = 1.$$



令半圆柱的高为 h , 则 $A(0, 0, 0)$,
 $B(0, 2, 0)$, $F(2, 0, 0)$, $D(0, 0, h)$,
 $G(-1, 1, h)$,

所以 $\overrightarrow{FD} = (-2, 0, h)$, $\overrightarrow{BD} = (0, -2, h)$,
 $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{AG} = (-1, 1, h)$.

设 $\mathbf{m} = (x, y, z)$ 是平面 BDF 的法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{FD} = -2x + hz = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BD} = -2y + hz = 0, \end{cases} \quad \text{令 } z = 2, \text{ 则}$$

$$\mathbf{m} = (h, h, 2).$$

设 $\mathbf{n} = (a, b, c)$ 是平面 ABG 的法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2b = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AG} = -a + b + hc = 0, \end{cases} \quad \text{令 } c = 1, \text{ 则}$$

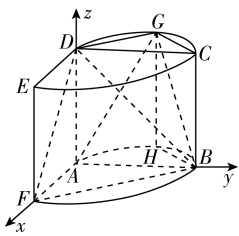
$$\mathbf{n} = (h, 0, 1).$$

$$\text{所以 } |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \left| \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} \right| =$$

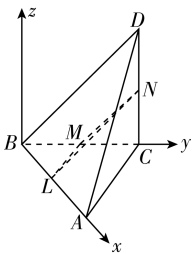
$$\frac{h^2 + 2}{\sqrt{2h^2 + 4} \times \sqrt{h^2 + 1}} = \frac{\sqrt{15}}{5}, \text{ 整理可得}$$

$(h-2)(h+2) = 0$, 则 $h = 2$, 由题设可知, 此时点 $G(-1, 1, 2)$, $D(0, 0, 2)$,
 $F(2, 0, 0)$, 则 $\overrightarrow{DF} = (2, 0, -2)$, $\overrightarrow{DG} =$
 $(-1, 1, 0)$, 所以点 G 到直线 DF 的距

$$\text{离 } d = \sqrt{|\overrightarrow{DG}|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{DF}}{|\overrightarrow{DF}|} \right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$



10. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 【解析】由题意, 建立如图所示的空间直角坐标系 $B-xyz$,



$$\text{则 } L\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), M\left(0, \frac{1}{2}, 0\right), N\left(0, 1, \frac{1}{2}\right),$$



所以 $\vec{LM} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\vec{LN} = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$,

所以点 M 到直线 LN 的距离 $d =$

$$\sqrt{|\vec{LM}|^2 - \left(\frac{\vec{LM} \cdot \vec{LN}}{|\vec{LN}|}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$